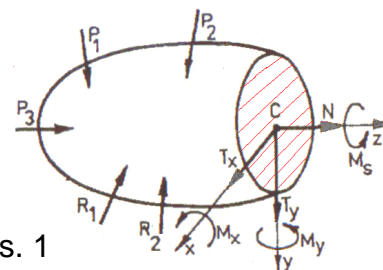


**Instrukcja przygotowania i realizacji scenariusza dotyczącego ćwiczenia T6  
z przedmiotu "Wytrzymałość materiałów", przeznaczona dla studentów II roku studiów  
stacjonarnych I stopnia w kierunku Energetyka na Wydz. Energetyki i Paliw \***

Treść ćwiczenia T6: **Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach**

**Część I. Pojęcia, definicje i założenia dotyczące wyznaczania sił (obciążeń) wewnętrznych w belkach**

- 1) **Obciążenia (siły) wewnętrzne**, to w ogólnym przypadku układ środkowy trzech sił  $N$ ,  $T_x$ ,  $T_y$  oraz układ środkowy trzech momentów  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_s$  przypisanych do przekroju elementu mechanicznego (rys. 1)



Rys. 1

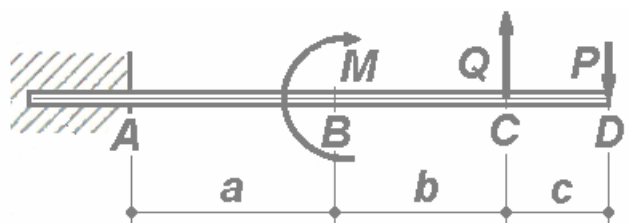
$P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  – obciążenia zewnętrzne czynne elementu mechanicznego,

$R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  - obciążenia zewnętrzne bierne od sił reakcji więzów,

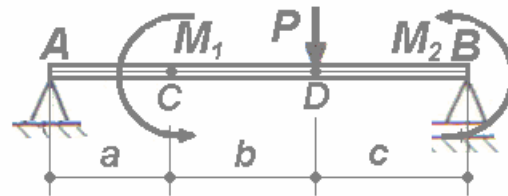
$N$ ,  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_s$  – sześć składowych obciążenia wewnętrznego w elemencie mechanicznym przypisanych do analizowanego przekroju tego elementu nazywanych jako:

- siły (fizyczne) wewnętrzne:  $N$  – siła wewnętrzna normalna,  $T_x$ ,  $T_y$  – siły wewnętrzne styczne,
- momenty (fizyczne) wewnętrzne):  $M_s$  - moment wewnętrzny skręcający,  $M_x$ ,  $M_y$  – momenty wewnętrzne zginające.

- 2) **Belka**: jest to pręt z **więzami**, zwykle prosty, obciążony w ogólnym przypadku **siłami zewnętrznymi czynnymi** działającymi prostopadle do osi pręta oraz **momentami zewnętrznymi czynnymi** działającymi w płaszczyznach przechodzących przez oś pręta.
- 3) **Schemat obliczeniowy belki**: jest to rysunek przedstawiający rodzaj i usytuowanie **więzów** względem **obciążeń zewnętrznych czynnych** belki, tj. zewnętrznych sił czynnych i zewnętrznych momentów czynnych) oraz parametry tych obciążeń (rys. 2).



**Belka jednostronnie utwierdzona**



**Belka swobodnie podparta**

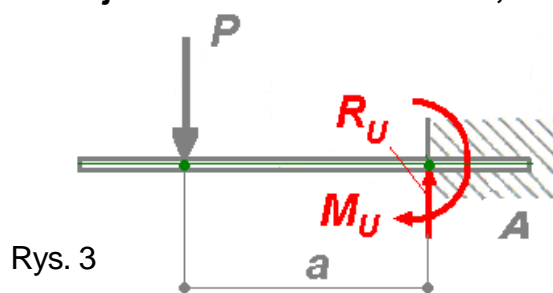
Rys. 2

\* Autorem instrukcji jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Instrukcja stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zmianami). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie instrukcji niż podane w jej przeznaczeniu.

- 4) **Belka statycznie wyznaczalna:** belka, której **obciążenia zewnętrzne bierne** (siły i momenty zadawane na belkę przez jej więzy) można obliczyć z równań równowagi statycznej tej belki. Gdy nie można - belka jest **statycznie niewyznaczalna**.
- 5) Obciążenia zewnętrzne belki wywołują w każdym przekroju tej belki - prostopadłym do jej osi - **dwa rodzaje obciążeń wewnętrznych:**
- **siłę tnącą**, która działa stycznie do płaszczyzny przekroju,
  - **moment zginający**, który działa w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju.
- 6) Wyniki obliczeń obciążeń wewnętrznych przedstawia się w formie dwu wykresów, z których jeden pokazuje **rozkład siły tnącej** wzdłuż długości belki, a drugi - **rozkład momentu zginającego** wzdłuż tej długości.

## Część II. Schematy obliczeniowe belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym

- 1) **Belka jednostronnie utwierdzona**, obciążona **jedną siłą zewnętrzną czynną** (rys. 3)



Rys. 3

**Obciążenie czynne belki:** siła  $P$

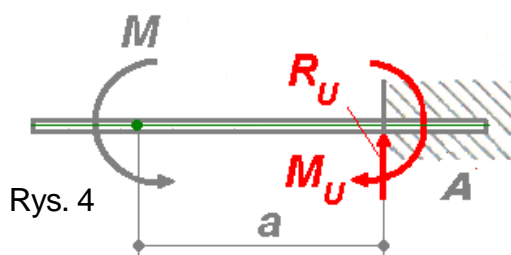
**Więzy:** uchwyt z utwierdzeniem

**Reakcje:**

$$R_U = P, \quad M_U = P \cdot a$$

**Uwaga:** Siła reakcji  $R_U$  oraz moment utwierdzenia  $M_U$  są  **dodatnie**, gdy ich zwroty względem siły  $P$  są takie jak na rys, 3. W innym przypadku siła reakcji  $R_U$  oraz moment utwierdzenia  $M_U$  są **ujemne**

- 2) **Belka jednostronnie utwierdzona**, obciążona **jednym momentem zewnętrznym czynnym** (rys.4)



Rys. 4

**Obciążenie czynne belki:** moment  $M$

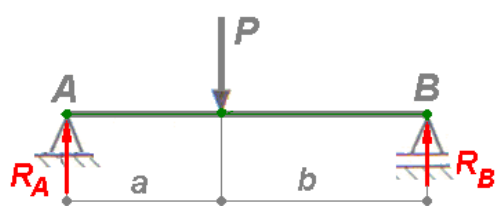
**Więzy:** uchwyt z utwierdzeniem

**Reakcje:**

$$R_U = 0, \quad M_U = M$$

**Uwaga:** Moment utwierdzenia  $M_U$  jest  **dodatni**, gdy jego zwrot względem momentu  $M$  jest taki jak na rys, 4. W innym przypadku moment utwierdzenia  $M_U$  jest **ujemny**.

- 3) **Belka swobodnie podparta**, obciążona **jedną siłą czynną** (rys. 5)



Rys.5.

**Obciążenie czynne belki:** siła  $P$

**Więzy:** A - podpora nieprzesuwana z przegubem,

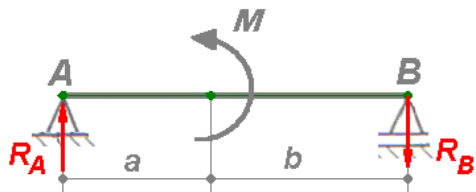
B - podpora przesuwana bez tarcia.

**Reakcje:**

$$R_A = P \frac{b}{a+b}, \quad R_B = P \frac{a}{a+b}$$

**Uwaga:** Siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są  **dodatnie**, gdy ich zwroty względem siły  $P$  są takie jak na rys. 5. W innym przypadku siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są **ujemne**.

- 4) Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym między podporami (rys. 6).



Rys. 6

Obciążenie czynne belki: moment  $M$

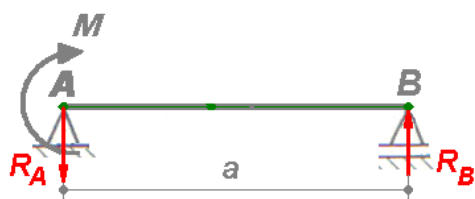
Więzy:  $A$  - podpora nieprzesuwna z przegubem,  
 $B$  - podpora przesuwna bez tarcia.

Reakcje:

$$R_A = R_B = \frac{M}{a+b}$$

**Uwaga:** Siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są dodatnie, gdy ich zwroty względem momentu  $M$  są takie jak na rys. 6. W innym przypadku siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są ujemne.

- 5) Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym na podporze (rys. 7)



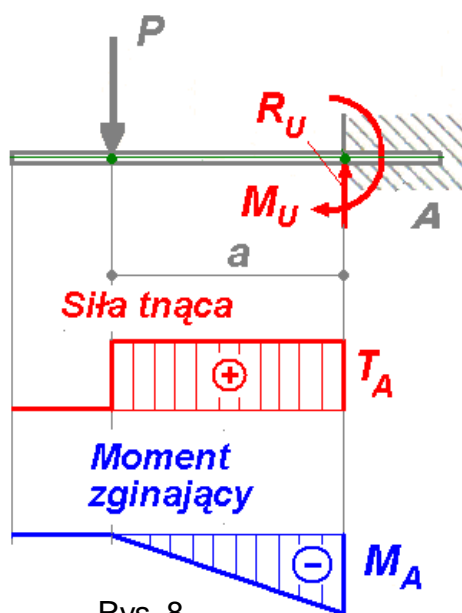
Rys. 7

$$R_A = R_B = \frac{M}{a}$$

**Uwaga:** Siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są dodatnie, gdy ich zwroty względem momentu  $M$  są takie jak na rys. 6. W innym przypadku siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są ujemne.

### Część III. Wykresy rozkładu obciążeń wewnętrznych dla belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym

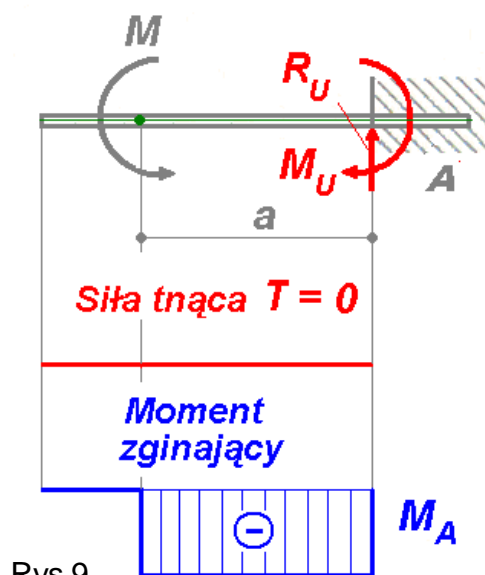
- 1) Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jedną siłą czynną (rys. 8):



Rys. 8

$$T_A = P, \quad M_A = -P \cdot a$$

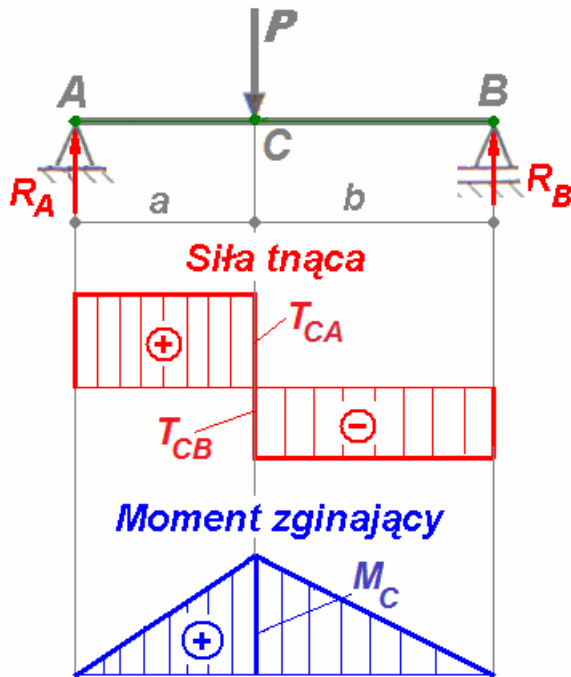
- 2) Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jednym momentem czynnym (rys. 9):



Rys.9

$$T = 0, \quad M_A = -M$$

3) Belka swobodnie podparta, obciążona jedną siłą czynną (rys. 10):



Rys. 10

$T_{CA}$  - siła tnąca w przekroju **C** po stronie podpory **A**

$$T_{CA} = P \frac{b}{a+b}$$

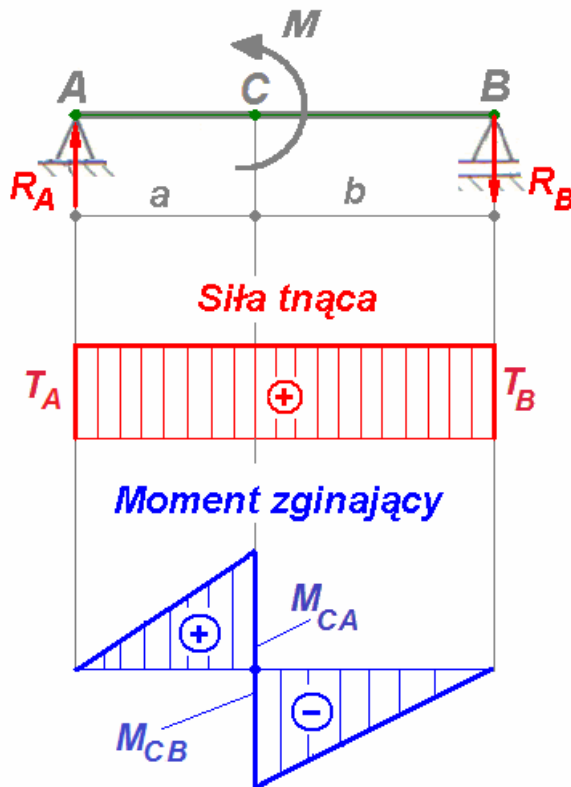
$T_{CB}$  - siła tnąca w przekroju **C** po stronie podpory **B**:

$$T_{CB} = -P \frac{a}{a+b}$$

$M_C$  - moment zginający w przekroju **C**, taki sam po stronie podpory **A**, jak i po stronie podpory **B**:

$$M_C = P \frac{a \cdot b}{a+b}$$

4) Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym między podporami (rys. 11):



Rys. 11

$T_A, T_B$  - siła tnąca w przekrojach podporowych belki:

$$T_A = T_B = \frac{M}{a+b}$$

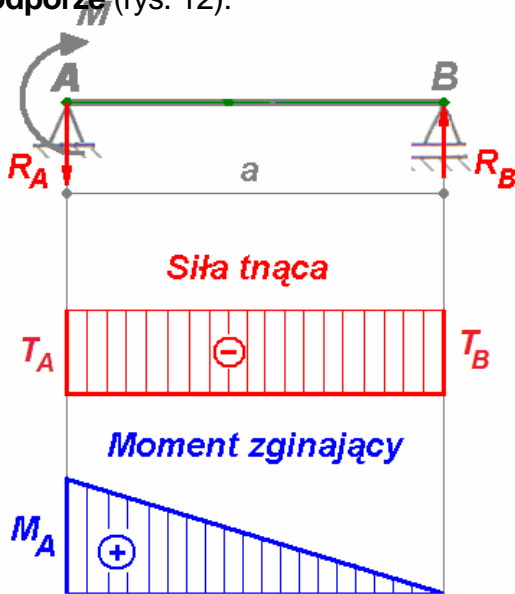
$M_{CA}$  - moment zginający w przekroju **C** po stronie podpory **A**:

$$M_{CA} = M \frac{a}{a+b}$$

$M_{CB}$  - moment zginający w przekroju **C** po stronie podpory **B**.

$$M_{CB} = -M \frac{b}{a+b}$$

- 5) Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym na podporze (rys. 12):



$T_A, T_B$  - siła tnąca w przekrojach podporowych belki:

$$T_A = T_B = -\frac{M}{a}$$

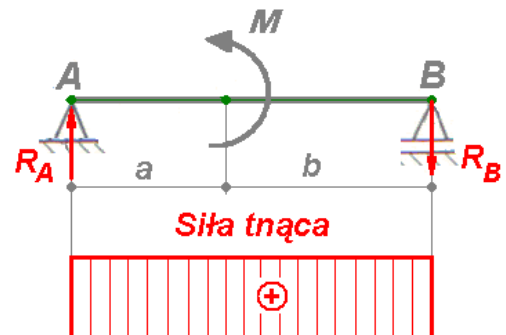
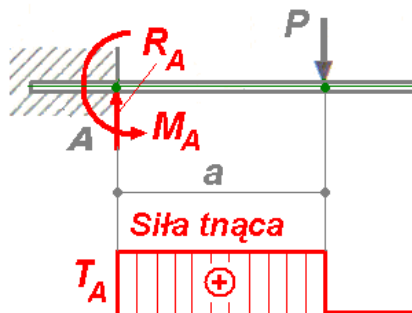
$M_A$  - moment zginający w przekroju działania momentu  $M$

$$M_A = M$$

Rys. 12

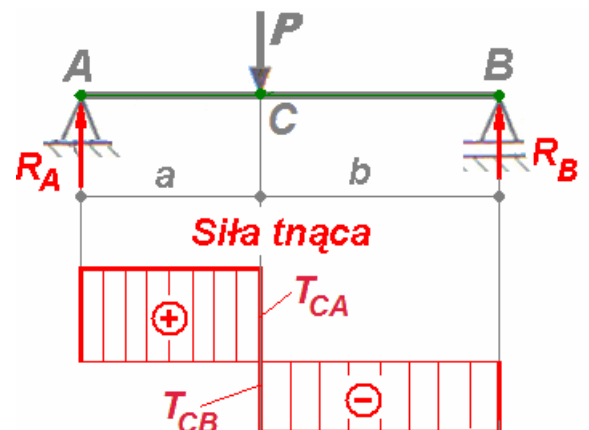
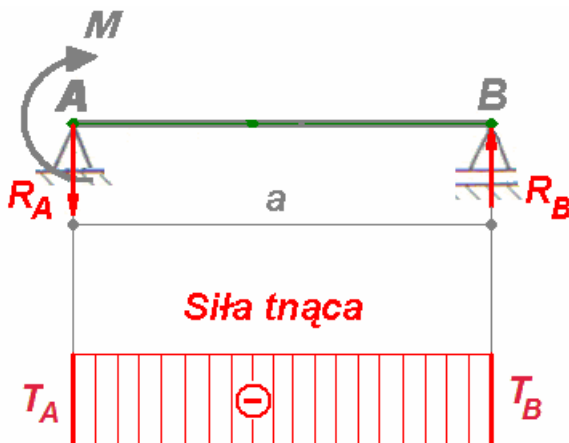
- 6) Zasady określania znaku dla siły tnącej

- Siła tnąca w analizowanym przekroju jest **dodatnia**, jeżeli siła zewnętrzna po **lewej** stronie przekroju ma być skierowana do **góry**, a siła zewnętrzna po **prawej** stronie tego przekroju ma być skierowana **w dół**. (rys.13):



Rys. 13

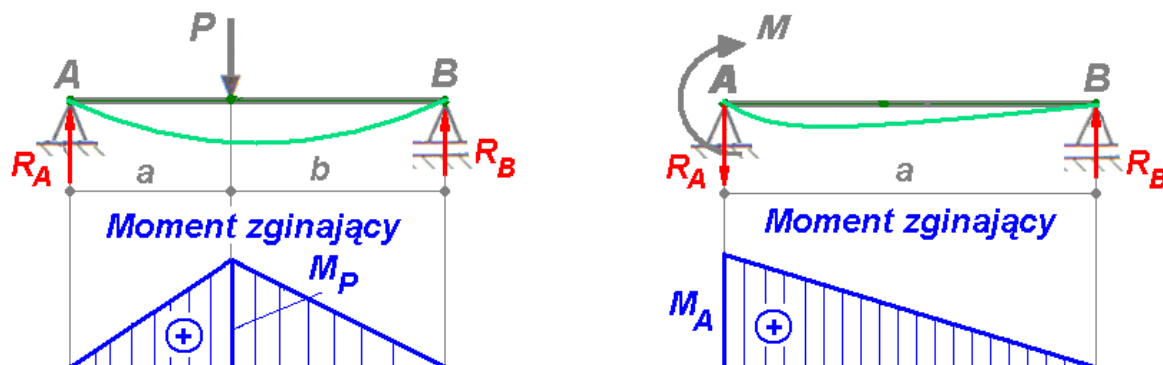
- Siła tnąca w analizowanym przekroju jest **ujemna**, jeżeli siła zewnętrzna po **lewej** stronie przekroju ma być skierowana **w dół**, a siła zewnętrzna po **prawej** stronie tego przekroju ma być skierowana do **góry** (rys.14):



Rys.14

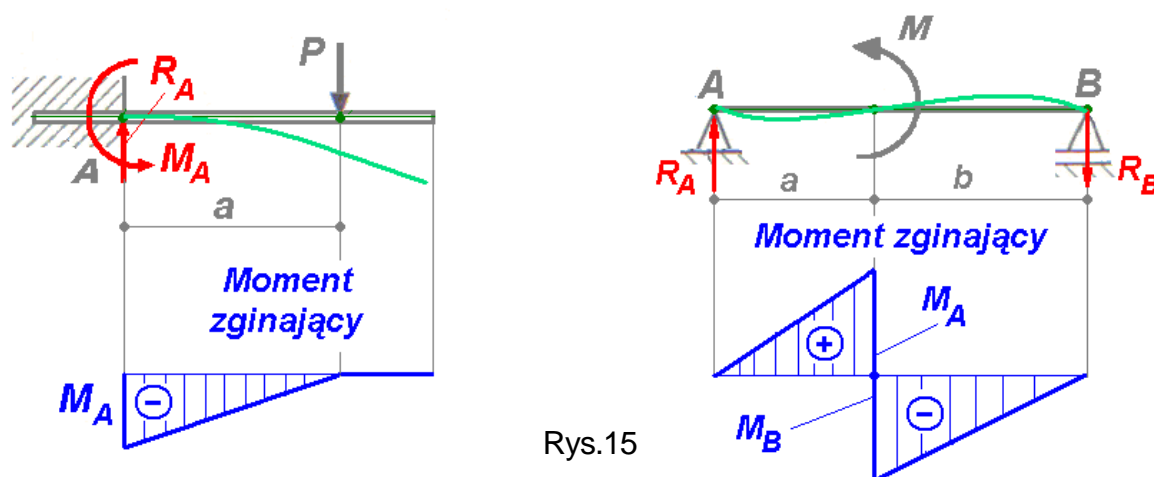
## 7) Zasady określania znaku dla momentu zginającego

- Moment zginający w analizowanym przekroju jest **dodatni**, gdy wygina belkę wypukłością w dół (rys.14):



Rys. 14

- Moment zginający w analizowanym przekroju jest **ujemny**, gdy wygina belkę wypukłością w górę (rys.15):



Rys.15

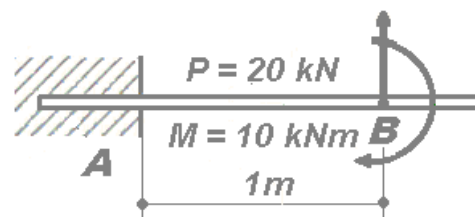
## Część IV. Obliczanie sił wewnętrznych belek z niepojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym, z zastosowaniem metody superpozycji

### 1) Wskazówki:

- Obciążenia wewnętrzne w każdym przekroju belki, wywołane przez **kilka obciążeń zewnętrznych** tej belki są **sumą algebraiczną cząstkowych obciążeń wewnętrznych** wywołanych przez **każde z obciążeń zewnętrznych działające oddzielnie** (zasada superpozycji).
- Dla **każdego obciążenia zewnętrznego czynnego** przyjmuje się schemat obliczeniowy belki zawierający tylko **to obciążenie zewnętrzne**, po czym dla tego schematu sporządza się wykres rozkładu dla **cząstkowej siły tnącej** oraz wykres rozkładu dla **cząstkowego momentu zginającego**.
- Rozkład **całkowitej siły tnącej** jest sumą algebraiczną cząstkowych rozkładów tej siły, a rozkład **całkowitego momentu gnącego** jest sumą algebraiczną cząstkowych rozkładów tego momentu.

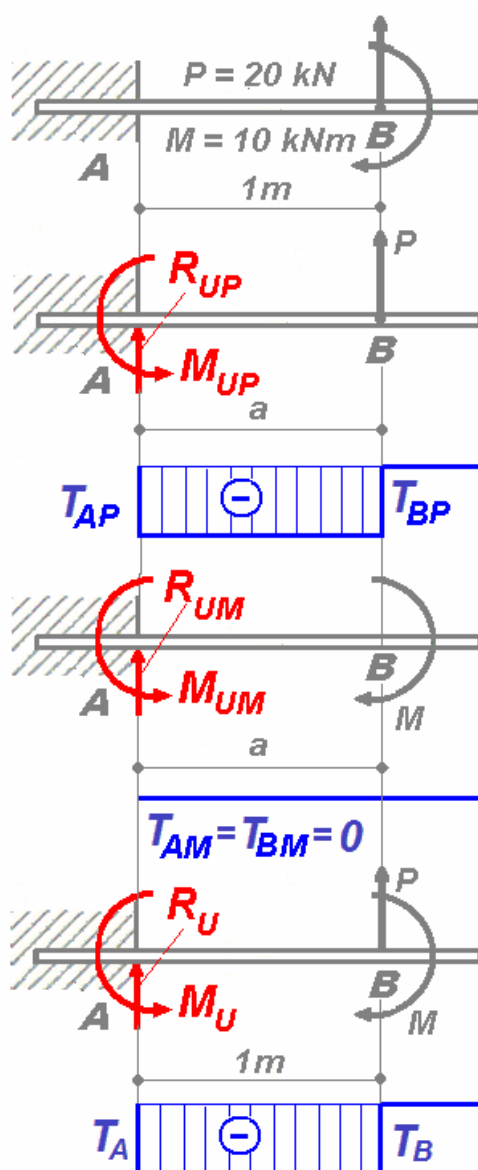
## 2) Przykład obliczeniowy dla belki jednostronnie utwierdzonej

Dla belki jednostronnie utwierdzonej obciążonej zewnątrz jak na rys.16 opracować wykres rozkładu siły tnącej oraz wykres rozkładu momentu zginającego stosując zasadę superpozycji. Wykonać stosowne obliczenia, a wykresy sporządzić z zachowaniem proporcji pomiędzy poszczególnymi wartościami obciążeń wewnętrznych.



Rys. 16

- Wykres rozkładu siły tnącej częściowej i całkowitej:



$$P = 20 \text{ kN}, \quad M = 10 \text{ kNm},$$

$$a = 1 \text{ m}$$

$$R_{UP} = -P = -20 \text{ kN}$$

$$M_{UP} = -P \cdot a = -20 \text{ kNm}$$

$$T_{AP} = T_{BP} = -P = -20 \text{ kN}$$

$$R_{UM} = 0, \quad M_{UM} = M = 10 \text{ kNm}$$

$$T_{AM} = T_{BM} = 0$$

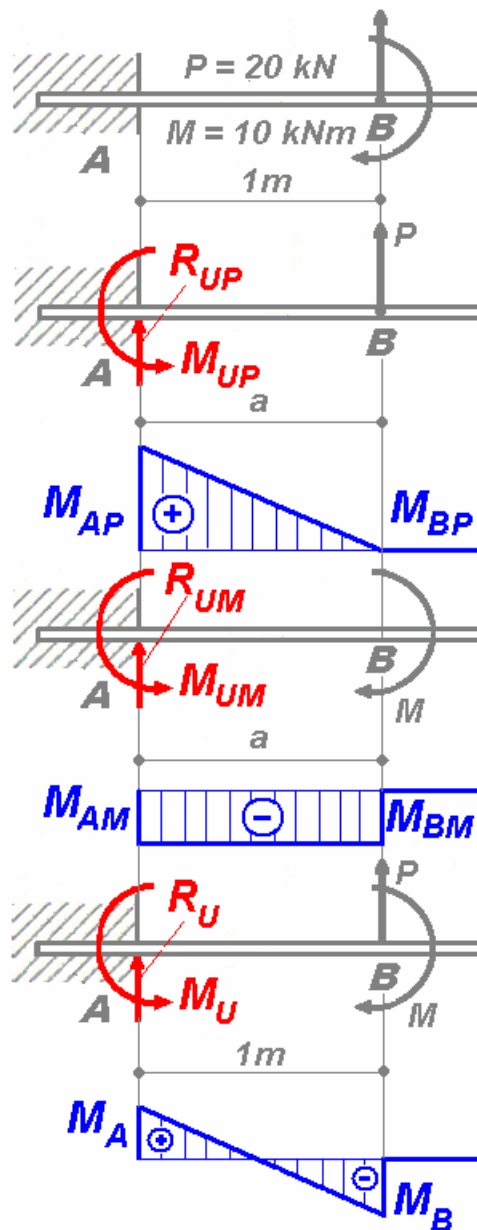
$$R_U = R_{UP} + R_{UM} = -20 + 0 = -20 \text{ kN}$$

$$M_U = M_{UP} + M_{UM} = -20 + 10 = -10 \text{ kNm}$$

$$T_A = T_{AP} + T_{AM} = -20 + 0 = -20 \text{ kN}$$

$$T_B = T_{BP} + T_{BM} = -20 + 0 = -20 \text{ kN}$$

- Wykres rozkładu momentu zginającego cząstkowego i całkowitego:



- Obliczenia do rozkładu momentu zginającego:

$$P = 20 \text{ kN}, \quad M = 10 \text{ kNm},$$

$$a = 1 \text{ m}$$

$$R_{UP} = -P = -20 \text{ kN}$$

$$M_{UP} = -P \cdot a = -20 \text{ kNm}$$

$$M_{AP} = P \cdot a = 20 \text{ kNm}, \quad M_{BP} = 0$$

$$R_{UM} = 0, \quad M_{UM} = M = 10 \text{ kNm}$$

$$M_{AM} = -M = -10 \text{ kNm}$$

$$M_{BM} = -M = -10 \text{ kNm}$$

$$R_U = R_{UP} + R_{UM} = -20 + 0 = -20 \text{ kN}$$

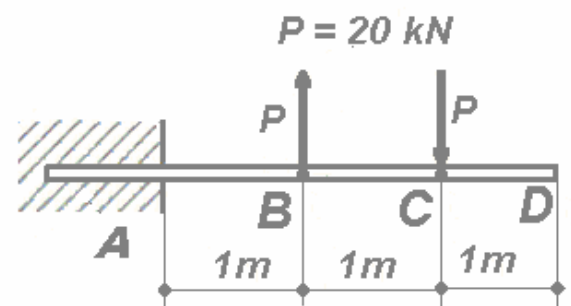
$$M_U = M_{UP} + M_{UM} = -20 + 10 = -10$$

$$M_A = M_{AP} + M_{AM} = 20 - 10 = 10 \text{ kNm}$$

$$M_B = M_{BP} + M_{BM} = 0 - 10 = -10 \text{ kNm}$$

### 3) Zadanie domowe dla belki jednostronnie utwierdzonej

Dla belki jednostronnie utwierdzonej, obciążonej zewnętrznie jak na rys.17 opracować wykres rozkładu siły tnącej oraz wykres rozkładu momentu zginającego stosując zasadę superpozycji. Wykonać stosowne obliczenia, a wykresy sporządzić z zachowaniem proporcji pomiędzy poszczególnymi wartościami obciążeń wewnętrznych.

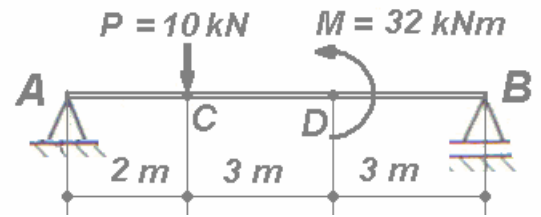


Rys. 17



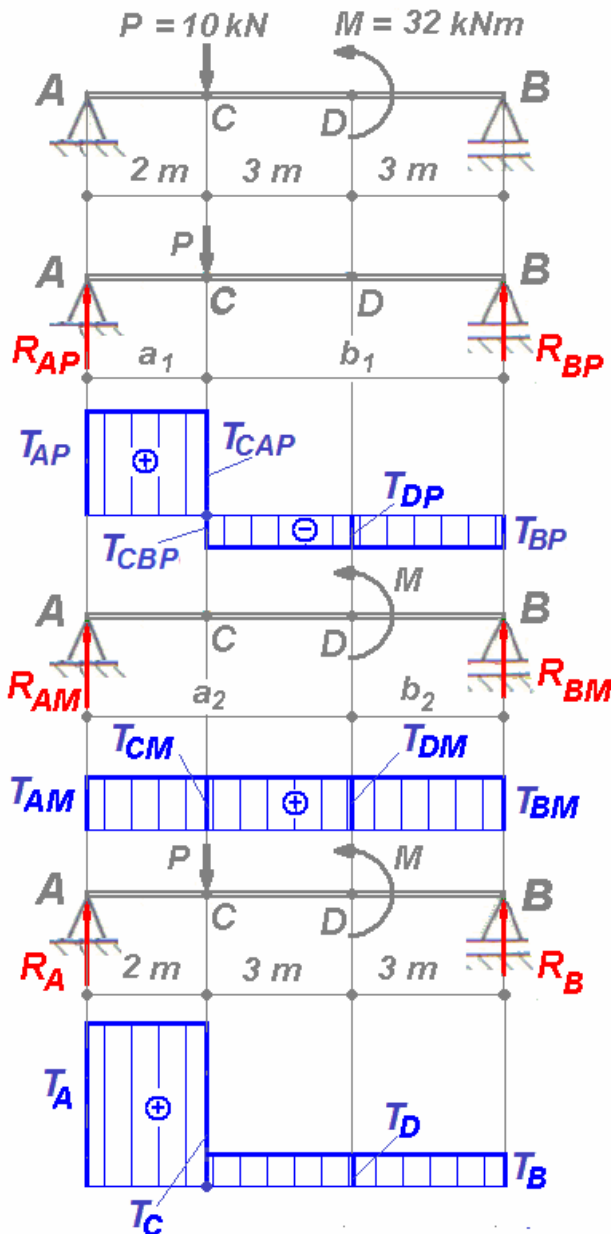
#### 4) Przykład obliczeniowy dla belki swobodnie podpartej

Dla belki swobodnie podpartej, obciążonej zewnętrznie jak na rys. 18, opracować wykres rozkładu siły tnącej oraz wykres rozkładu momentu zginającego stosując zasadę superpozycji. Wykonać stosowne obliczenia, a wykresy sporządzić z zachowaniem proporcji pomiędzy poszczególnymi wartościami obciążeń wewnętrznych.



Rys. 18:

- Wykres rozkładu siły tnącej częściowej i całkowitej;



- Obliczenia do rozkładu siły tnącej:

$$P = 10 \text{ kN}, \quad M = 32 \text{ kNm}$$

$$R_{AP} = \frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot P = \frac{3+3}{2+3} \cdot 10 = 7,5 \text{ kN}$$

$$R_{BP} = P - R_{AP} = 10 - 7,5 = 2,5 \text{ kN}$$

$$T_{AP} = T_{CAP} = R_{AP} = 7,5 \text{ kN}$$

$$T_{BP} = T_{CBP} = T_{DP} = -R_{BP} = -2,5 \text{ kN}$$

$$R_{AM} = \frac{M}{a_2 + b_2} = \frac{32}{5+3} = 4,0 \text{ kN}$$

$$R_{BM} = -\frac{M}{a_2 + b_2} = -\frac{32}{5+3} = -4,0 \text{ kN}$$

$$T_{AM} = T_{BM} = T_{CM} = T_{DM} = R_{AM} = -R_{BM} = 4,0 \text{ kN}$$

$$R_A = R_{AP} + R_{AM} = 7,5 + 4,0 = 11,5 \text{ kN}$$

$$R_B = R_{BP} + R_{BM} = 2,5 - 4,0 = -1,5 \text{ kN}$$

$$T_A = T_{AP} + T_{AM} = 7,5 + 4,0 = 11,5 \text{ kN}$$

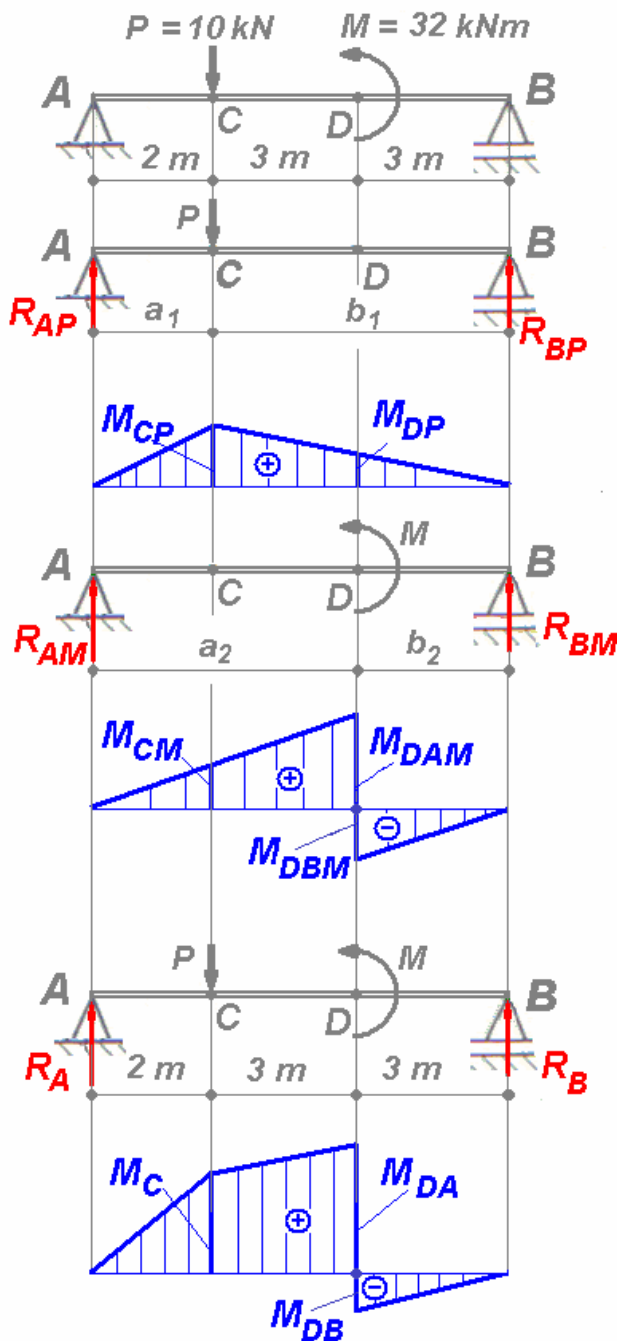
$$T_B = T_{BP} + T_{BM} = -2,5 + 4,0 = 1,5 \text{ kN}$$

Uwaga:

$T_{CAP}$  siła tnąca w przekroju C po stronie podpory A, wywołana przez siłę zewnętrzną P,

$T_{CBP}$  siła tnąca w przekroju C po stronie podpory B wywołana przez siłę zewnętrzną P.

- Wykres rozkładu momentu zginającego cząstkowego i całkowitego:



- Obliczenia do rozkładu momentu zginającego:

$$P = 10 \text{ kN}, \quad M = 32 \text{ kNm}$$

$$R_{AP} = \frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot P = \frac{6}{2 + 3} \cdot 10 = 7,5 \text{ kN}$$

$$R_{BP} = P - R_{AP} = 10 - 7,5 = 2,5 \text{ kN}$$

$$M_{CP} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} \cdot P = \frac{2 \cdot 6}{2 + 6} \cdot 10 = 15,0 \text{ kNm}$$

$$M_{DP} = M_{CP} \cdot \frac{b_2}{b_1} = 15 \cdot \frac{3}{6} = 7,5 \text{ kNm}$$

$$R_{AM} = \frac{M}{a_2 + b_2} = \frac{32}{5 + 3} = 4,0 \text{ kN}$$

$$R_{BM} = -\frac{M}{a_2 + b_2} = -\frac{32}{5 + 3} = -4,0 \text{ kN}$$

$$M_{DAM} = \frac{a_2}{a_2 + b_2} \cdot M = \frac{5}{2 + 6} \cdot 32 = 20,0 \text{ kNm}$$

$$M_{CM} = \frac{a_1}{a_2} \cdot M_{DAM} = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ kNm}$$

$$M_{DBM} = -\frac{b_2}{a_2 + b_2} \cdot M = -\frac{3}{5 + 3} \cdot 32 = -12,0 \text{ kNm}$$

$$R_A = R_{AP} + R_{AM} = 7,5 + 4,0 = 11,5 \text{ kN}$$

$$R_B = R_{BP} + R_{BM} = 2,5 - 4,0 = -1,5 \text{ kN}$$

$$M_C = M_{CP} + M_{CM} = 15,0 + 8,0 = 23,0 \text{ kNm}$$

$$M_{DA} = M_{DP} + M_{DAM} = 7,5 + 20,0 = 27,5 \text{ kNm}$$

$$M_{DB} = M_{DP} + M_{DBM} = 7,5 - 12,0 = -4,5 \text{ kNm}$$

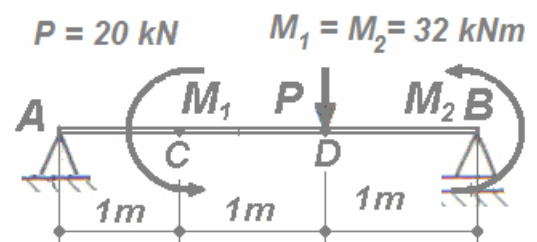
**Uwaga:**

$M_{DAM}$  - moment zginający w przekroju  $D$  po stronie podpory  $A$ , wywołany przez moment zewnętrzny  $M$ ,

$M_{DBM}$  - moment zginający w przekroju  $D$  po stronie podpory  $B$ , wywołany przez moment zewnętrzny  $M$ .

#### 4) Zadanie domowe

Dla belki obciążonej zewnętrznie jak na rys.19 opracować wykresy rozkładu dla siły tnącej oraz momentu zginającego z zachowaniem proporcji pomiędzy poszczególnymi wartościami obciążeń wewnętrznych.



Rys. 19

Koniec instrukcji